Archimède Option : BCPST

MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Dans tout le problème, on note pour tout réel x:

$$\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$$

Et l'on rappelle que $\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1$.

Partie I

1°/ Déterminer les réels en lesquels φ'' s'annule en changeant de signe. Même question pour Φ''.

2°/ On considère $G : x \mapsto e^{\frac{x^2}{2}}(1 - \Phi(x))$.

(i) Montrer que pour tout réel x:

$$G(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} \varphi(t)\,dt = e^{\frac{x^2}{2}}\left(\frac{1}{2} - \int_0^x \varphi(t)\,dt\right)$$

(ii) Déterminer, au moyen de G, toutes les solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, de l'équation différentielle:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) - xy(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

(iii) Montrer que G est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et déterminer ce développement.

3°/ (i) Justifier l'encadrement suivant:

$$\forall x > 0, \quad \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x\sqrt{2\pi}}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \leq 1 - \Phi(x) \leq \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x\sqrt{2\pi}}$$

(on pourra utiliser des intégrations par parties).

(ii) Utiliser l'inégalité de Bienaymé -Tchebychev pour une variable aléatoire normale centrée réduite afin de justifier:

$$\forall x > 0, \quad 1 - \Phi(x) \leq \frac{1}{2x^2}$$

4°/ Montrer l'existence et calculer: $\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(x))\,dx$.

5°/ Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'inégalité: $\Phi(k+1)-\Phi(k) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^k$ (on pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis).

6°/ Montrer pour tout $x \in [0,1[$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$ l'inégalité:

$$0 \leq \varphi(k+x)+\varphi(k-x) \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{k-1}$$

Partie II

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires intervenant dans cette partie.

1°/ Soit A une variable aléatoire réelle admettant comme densité l'application f continue par morceaux et positive sur $\mathbb{R}$ (telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$).

On lui associe la variable aléatoire partie entière de A: $B = [A]$, qui à tout $\omega \in \Omega$ associe $B(\omega) = [A(\omega)]$ dans $\mathbb{Z}$ tel que $B(\omega) \leq A(\omega) < B(\omega)+1$.

(i) Déterminer $\mathrm{P}(B=k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ (au moyen d'une intégrale portant sur f).

(ii) On suppose que A prend des valeurs positives, et que $f(x)=0$ si $x<0$. Montrer que A admet une espérance $\mathrm{E}(A)$ si et seulement si B en admet une, et dans ce cas $\mathrm{E}(B) \leq \mathrm{E}(A) \leq \mathrm{E}(B)+1$.

(iii) Expliciter l'encadrement précédent dans le cas particulier où A suit une loi exponentielle de paramètre λ.

2°/ Soit T une variable aléatoire réelle, normale centrée réduite, de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On lui associe les variables aléatoires suivantes: $X = |T|$, $Y = [T]$, $Z = [X]$.

(i) Déterminer une densité de X, son espérance et sa variance.

(ii) Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}(Z=k)$ (au moyen de Φ).

(iii) Déterminer pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{P}(Y=k)$.

(iv) Montrer la convergence absolue de la série $\sum_{k=1}^{+\infty} k\big(\mathrm{P}(Y=k)-\mathrm{P}(Y=-k)\big)$, et calculer sa somme (on pourra chercher à simplifier les sommes partielles). Comment interpréter ce calcul ?

(v) Montrer que Z admet une espérance.

3°/ Soit $U = T - Y$.

Montrer que U prend ses valeurs dans $[0,1[$, et que pour tout $u \in [0,1[$, on a:

$$\mathrm{P}(U \leq u) = \Phi(u) - \tfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \big(\Phi(k+u)-\Phi(k-u)\big)$$

4°/ (i) Montrer, en utilisant I-6, pour tout $x \in [0,1[$ la convergence de la série:

$$\theta(x) = \varphi(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \big(\varphi(k+x)+\varphi(k-x)\big)$$

On admettra que l'application θ ainsi définie est continue sur $[0,1[$.

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1[$, on pose: $\theta_n(x) = \varphi(x) + \sum_{k=1}^{n} (\varphi(k+x) + \varphi(k-x))$

Montrer que: $| \theta(x) - \theta_n(x) | \leq (\frac{1}{\sqrt{e}})^n \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}$

(iii) En déduire que pour tout $u \in [0,1[$, on a: $\mathbf{P}(U \leq u) = \int_0^u \theta(x)\,dx$, et déterminer une densité de U.

(iv) Utiliser l'inégalité de (ii) ci-dessus afin de justifier que U admet une espérance donnée par: $\mathbf{E}(U) = \lim_{n \to +\infty} (\int_0^1 t\,\theta_n(t)\,dt)$.

(v) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose: $a_k = \int_k^{k+1} t\,\varphi(t)\,dt, \quad b_k = \int_k^{k+1} \varphi(t)\,dt.$

Montrer que $O \leq kb_k \leq a_k$, et prouver: $\lim_{k \to +\infty} a_k = \lim_{k \to +\infty} kb_k = \lim_{k \to +\infty} b_k = 0.$

(vi) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 t\,\theta_n(t)\,dt$ au moyen de a_n, b_n et $\Phi(n)$, et en déduire: $\mathbf{E}(U)$. Ce résultat est-il en accord avec celui de la question **II,2, (iv)** ?

5°/ (i) Étudier si les variables T et U sont indépendantes.

(ii) Déterminer l'espérance de $T.X$, et étudier si les variables T et X sont indépendantes.

6°/ On considère une variable aléatoire V prenant ses valeurs dans $\{-1,1\}$ avec:

$$\mathbf{P}(V=1) = \mathbf{P}(V=-1) = \tfrac{1}{2},$$

les variables T et V étant indépendantes. Soit $W = T.V$.

(i) Déterminer une densité de W.

(ii) Déterminer l'espérance de $T.W$, et étudier si les variables T et W sont indépendantes.